3°. che il luogo della sua disparizione fu a SO. alla distanza di circa 47° dal meridiano.

Fu veduta questa meteora anche a Milano, come pure in tutto il Piemonte e nella vicinanza di Genova. Nella quale ultima città si udì anche l'accompagnamento di alcune detonazioni, e la direzione fu pure da Est all' Ovest; però taluno mi disse che chi vide il fenomeno si trovava rivolto al Nord. A Sorza dicono d'aver veduto passare contemporaneamente tre corpi luminosi; in altri paesi dicono d'averne veduti tre.

Bestimmung analytischer Gleichungen für die Seiten von Kegelschnitts-Vielecken und Anwendung derselben.

Von **Guido Härtenberger** in Innsbruck.

(Mit III Tafeln.)

(Vorgelegt durch das w. M. Herrn Prof. Petzval.)

Um für ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Polygon von beliebiger Seitenzahl ein System analytischer Gleichungen zu bekommen, kann man so verfahren:

Der gegebene Kegelschnitt habe die Gleichung: $y^2 = 2px + qx^2$. Anstatt nun die Curve durch diese Gleichung II. Grades zu charakterisiren, kann man die Punkte der Krummen durch ein System zweier linearer Gleichungen bestimmen und sagen:

Die Punkte des Kegelschnittes bilden immer den Durchschnitt zweier Geraden, welche bezüglich der Veränderlichkeit ihrer Lage an ein bestimmtes Gesetz gebunden sind.

So kann die Gleichung: $y^2 = 2px + qx^2$ durch folgende zwei lineare ersetzt werden: 1) $y = ux$, 2) $y = \frac{2p + qx}{u}$. Der Coëfficient u bedeutet eine zwischen $+\infty$ und $-\infty$ willkürliche Zahlengrösse, welche eben die Veränderlichkeit der Lage der durch diese zwei Gleichungen repräsentirten Geraden involvirt. Diese Veränderlichkeit ist keine absolute, sondern eine beschränkte, weil blos ein Coëfficient jener zwei Gleichungen variabel gedacht wird.

Sind ξ und η die Coordinaten des Durchschnittspunktes der zwei Geraden, so ist: $\eta = u\xi$ und $\eta = \frac{2p + q\xi}{u}$. Diese beiden Gleichungen multiplicirt geben: $\eta^2 = 2p\xi + q\xi^2$, d. h. der Durchschnittspunkt ist ein Punkt des Kegelschnittes.

Ist überhaupt die Gleichung: $y^2 = \varphi(x,y) \cdot \psi(x,y)$ gegeben, so kann sie durch folgende zwei ersetzt werden: 1) $y = u \cdot \varphi(x,y)$ und 2) $y = \frac{\psi(x,y)}{u}$, welche linear sind, wenn $\varphi(x,y)$ und $\psi(x,y)$ es sind.

Da zu einem bestimmten Punkte der Krummen ein bestimmtes u gehört, so ist es zweckmässig, einen Punkt der Curve gerade mit dem Buchstaben u zu bezeichnen.

Sehnengleichung.

Seien $u_{,}$ und $u_{,,}$ zwei Punkte des Kegelschnittes, so bestehen für sie folgende Gleichungen:

I. Für $u_{,}$

$$y - u_{,} x = o \quad \dots \dots \dots \quad a$$
$$y u_{,} - 2p - qx = o \quad \dots \dots \dots \quad b$$

II. Für $u_{,,}$

$$y - u_{,,} x = o \quad \dots \dots \dots \quad c$$
$$y u_{,,} - 2p - qx = o \quad \dots \dots \dots \quad d$$

Wird a mit $u_{,,}$ und c mit $u_{,}$ multiplicirt, so findet man:

$$a u_{,,} + b = c u_{,} + d = o =$$
$$y(u_{,} + u_{,,}) - u_{,} u_{,,} x - 2p - qx = o.$$

Aus der Entstehung dieser Gleichung folgt, dass sie die Sehne repräsentirt, welche die beiden Punkte $u_{,}$ und $u_{,,}$ verknüpft.

Verbindet man beliebig viele Punkte $u_{,}, u_{,,}, \dots u_n$ des gegebenen Kegelschnittes nach der Ordnung der Indices des Buchstabens u zu einem geschlossenen Polygon, so hat man für dieses folgendes System von Gleichungen:

$$y(u_{,} + u_{,,}) - u_{,} u_{,,} x - 2p - qx = o \quad \dots \quad 1$$
$$y(u_{,,} + u_{,,,}) - u_{,,} u_{,,,} x - 2p - qx = o \quad \dots \quad 2$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$\cdot \qquad \cdot \qquad \cdot$$
$$y(u_n + u_{,}) - u_n u_{,} x - 2p - qx = o \quad \dots \quad n$$

Für irgend eine andere Verbindungsweise der Punkte sind blos die Indices entsprechend zu vertauschen.

Gelangt man bei irgend einer Bestimmung des Coëfficienten u für einen Kegelschnittspunkt, der einer gegebenen Bedingung genügen soll, auf eine Gleichung von der Form $au^2 + 2bu + c = o$, welche sagt, dass es im Allgemeinen zwei Punkte gibt, welche die gegebene Bedingung erfüllen, so ist es zweckmässiger, dafür die Gleichung der Sehne anzugeben, welche diese beiden Punkte verbindet. Bezeichnet man zu diesem Zwecke die beiden Wurzelwerthe der Gleichung $au^2 + 2bu + c = o$ mit $u_{,}$ und $u_{,,}$, ist also $u_{,} + u_{,,} = -\frac{2b}{a}$, und $u_{,}u_{,,} = \frac{c}{a}$, so erhalte ich die entsprechende Sehnengleichung, wenn ich diese Werthe von $u_{,} + u_{,,}$ und $u_{,}u_{,,}$ in die allgemeine Gleichung $y(u_{,} + u_{,,}) - u_{,}u_{,,}x - 2p - qx = o$ einsetze. Ich bekomme dann:

$$a(2p + qx) + 2by + cx = o.$$

Anwendung auf das Problem.

Einem gegebenen Kegelschnitte ein Vieleck einzuzeichnen, dessen Seiten durch gegebene Punkte gehen.

Ich bezeichne die gegebenen Punkte mit 1, 2, 3, . . . n, ihre Coordinaten mit $x_{,}, y_{,}; x_{,,}, y_{,,}; \ldots x_n, y_n$, und die Eckpunkte des zu suchenden Vieleckes mit $u_{,}, u_{,,}, u_{,,,} \ldots u_n$. Setzt man die Coordinaten der gegebenen Punkte in das Gleichungen-System für ein einem Kegelschnitte eingeschriebenes Vieleck ein, so erhält man mit Rücksicht auf die Figur 1 gewählte Anordnung folgende Bedingungsgleichungen:

$$\begin{array}{ll}
y_{,}(u_{,} + u_{,,}) - u_{,}u_{,,}x_{,} - 2p - qx_{,} = o \;.\;.\;.\;.\; & 1 \\
y_{,,}(u_{,,} + u_{,,,}) - u_{,,}u_{,,,}x_{,,} - 2p - qx_{,,} = o \;.\;.\;.\;.\; & 2 \\
\quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot & \\
\quad\cdot \qquad\qquad \cdot \qquad\qquad \cdot & \\
y_n(u_n + u_{,}) - u_n u_{,} x_n - 2p - qx_n = o \;.\;.\;.\;.\; & n.
\end{array}$$

Drückt man den Werth von $u_{,,}$ aus den Gleichungen 2, 3, . . . n aus und setzt ihn in die Gleichung 1 ein, so wird die resultirende Endgleichung für $u_{,}$ den II. Grad nicht übersteigen, und ihre Form wird sein:

$$y_{,}(au_{,}^2 + 2bu_{,} + c) + x_{,}(a_{,}u_{,}^2 + 2b_{,}u_{,} + c_{,}) + 2p\,(a_{,,}u_{,}^2 + \\ + 2b_{,,}u_{,} + c_{,,}) = o = \Phi(u_{,}).$$

Diese Gleichung gibt für $u_{\prime}$ zwei Werthe, deren jeder einen zugehörigen Punkt und damit eine der gewählten Anordnung entsprechende Lösung des Problems bestimmt.

Wird $\Phi(u_{\prime})$ in die entsprechende Sehnengleichung umgewandelt, so wird diese die Form haben:

$$y_{\prime}\varphi(x,y) + x_{\prime}\psi(x,y) + 2p\chi(x,y) = o = F_{\prime}(x,y),$$

wo φ, ψ und χ, also auch $F_{\prime}$ selbstverständlich lineare Functionen von x und y sind. Die Gerade dieser Gleichung verbindet die beiden den Werthen für $u_{\prime}$ aus der Gleichung $\Phi(u_{\prime}) = o$ entsprechenden Punkte. Ist diese Gerade bekannt, so sind damit die beiden entsprechenden Lösungen der Aufgabe gegeben.

Solcher Geraden gibt es so viele, als es Gleichungen $\Phi(u)$, d. h. soviel als es gegebene Punkte gibt, deren jedem eine gewisse Gerade $F(x,y)$ entspricht, wie z. B. dem Punkte $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ die Gerade $F_{\prime}(x,y)$. Unter der einem bestimmten Punkte x_r, y_r entsprechenden Geraden $F_r(x,y)$ verstehe ich also die Gerade jener Gleichung, die auf eine in Bezug dieses Punktes ganz gleiche Weise deducirt wird, wie die Gleichung $F_r(xy)$ rücksichtlich des Punktes $x_{\prime}$, $y_{\prime}$.

Sind (Figur 2) $u_{\prime}\, u_{\prime\prime} \ldots u_{n}$ und $u'_{\prime}\, u'_{\prime} \ldots u_{n}'$ die beiden der Bedingung entsprechenden Vielecke, so ist die Linie $u_{\prime} u_{\prime}'$ die Gerade $F_{\prime}(x,y)$.

Die Gleichung $F_{\prime}(x,y)$ war:

$$y_{\prime}\varphi(x,y) + x_{\prime}\psi(x,y) + 2p\chi(x,y) = o.$$

Dieser Gleichung wird genügt, wenn:

1. $\varphi(x,y) = o$, und $x_{\prime}\psi(x,y) + 2p\chi(x,y) = o$ wird; oder wenn:
2. $\psi(x,y) = o$ und $y_{\prime}\varphi(x,y) + 2p\chi(x,y) = o$ wird.

Die allgemeine Kegelschnittsgleichung $y^2 = 2px + qx^2$ bleibt nun der Form nach dieselbe, wenn die Coordinaten-Axen überhaupt die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser haben, während der Anfangspunkt stets auf der Peripherie des Kegelschnittes bleibt.

Da ferner die Gerade $F_{\prime}(x,y)$ von der Wahl des Coordinaten-Systems nicht abhängt, so ist es gleichgiltig, was für zwei conjugirte Richtungen ich bei Fixirung irgend eines Punktes der Geraden $F_{\prime}(x,y)$ zu Coordinaten-Axen wähle. Bedenken wir noch, dass die Ausdrücke φ, ψ und χ die Coordinaten $x_{\prime}$, $y_{\prime}$ nicht enthalten, so gibt das sub 1 oder sub 2 angegebene Erfülltsein der Gleichung $F_{\prime}(x,y)$ in Worten folgenden Satz:

Bewegt sich der Punkt $x_{\prime}, y_{\prime}$ auf irgend einer durch ihn gezogenen Transversalen, so schneiden sich die bezüglichen Geraden $F_{\prime}(x,y)$ stets in einem Punkte O. Jeder willkürlich durch $x_{\prime}, y_{\prime}$ gezogenen Transversalen entspricht ein solcher Punkt. Die Punkte O beliebiger Transversalen liegen alle auf der Geraden $F_{\prime}(x,y)$, welche dem allen Transversalen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte $x_{\prime}, y_{\prime}$ entspricht.

Dieser Satz gilt natürlich für jede irgend einem Punkte x_r, y_r entsprechende Gerade $F_r(x,y)$.

Construction der Geraden $F_{\prime}(x,y)$ und Lösung des allgemeinen Problems.

Die allgemeine Grundeigenschaft der Geraden $F(x,y)$ gibt uns nun ein Mittel an die Hand, ihre Construction auf einfache Weise auszuführen.

Es sei nämlich die Construction der Geraden $F_{\prime}(x,y)$ zu ermitteln.

Ich ziehe durch den Punkt $x_{\prime}, y_{\prime}$ eine beliebige Transversale $T_{\prime}$, welche den gegebenen Kegelschnitt in den Punkten $t_{\prime}$ und $t_{\prime}'$ treffen soll. Bin ich nun im Stande, auf dieser Transversalen zwei Punkte so zu bestimmen, dass die ihnen entsprechenden Geraden $F(x,y)$ leicht zu construiren sind, so gibt ihr Durchschnitt einen Punkt der Geraden $F_{\prime}(x,y)$.

Solche Punkte, für welche dieses der Fall ist, sind aber die Punkte $t_{\prime}$ und $t_{\prime}'$, in welchen die Transversale $T_{\prime}$ die Kegelschnitts-Curve trifft.

Befindet sich nämlich einer der gegebenen Punkte auf der Peripherie des Kegelschnittes selbst, so sind die beiden möglichen, irgend einer Ordnung, nach welcher die Seiten des Vieleckes durch die gegebenen Punkte hindurchgehen, entsprechenden Polygone, mithin auch die einem der Punkte $t_{\prime}$ oder $t_{\prime}'$ entsprechenden Geraden $F(x,y)$ leicht zu construiren.

Figur 3 zeigt diese Construction für vier gegebene Punkte 1, 2, 3 und 4, von welchen der Punkt 1 auf der Krummen selbst liegt, Wähle ich die Ordnung, nach welcher die Vierecks-Seiten durch die gegebenen Punkte hindurchgehen, so wie die Zahlen, womit diese Punkte bezeichnet sind, auf einander folgen, so sind $u_{,} u_{,,} u_{,,,} u_{,,,,}$ und $u'_{,} u'_{,,} u'_{,,,} u'_{,,,,}$ die beiden entsprechenden Vierecke. Die Punkte $u_{,}$ und $u'_{,,}$ fallen mit dem Punkte 1 zusammen, was auch nicht anders sein kann, wenn der Punkt 1 auf der Peripherie des Kegelschnittes selbst liegt. $u_{,} u_{,}'$ ist die Gerade $F_{,}(x, y)$.

Sind beliebig viele Punkte 1, 2, 3 . . . n gegeben, von denen der Punkt I auf der Kegelschnitts-Curve liegt, so findet man die Gerade $F_{,}(x,y)$ für den Fall, als die Vielecks-Seiten nach der Ordnung, in welcher die gegebenen Punkte bezeichnet sind, auf einander folgen, durch folgende Construction:

Ich ziehe vom Punkte 1 eine Linie durch den Punkt 2 bis an den Kegelschnitt; von da gehe ich nach 3, wieder bis an die Peripherie der Krummen; von da nach 4, 5 . . . bis n. Den Einschnittspunkt, welchen die letzte durch n gezogene Linie in die Peripherie der Curve macht, verbinde ich mit dem Punkte 1. Diese Verbindungslinie wird die Gerade $F_{,}(x, y)$ sein.

Ich habe nun behufs der Lösung des allgemeinen Problems folgende Construction:

Ich bezeichne die Punkte nach der Ordnung, in welcher die Vielecks-Seiten durch dieselben hindurchgehen sollen, mit 1, 2, 3 . . . n. Durch einen der gegebenen Punkte z. B. durch 1 ziehe ich eine beliebige Transversale T, welche den gegebenen Kegelschnitt in den Punkten t und $t_{,}$ trifft. Jetzt verbinde ich t mit 2; von dem Punkte, wo diese Verbindungslinie die Curve trifft, gehe ich nach 3 bis an die Krumme, von da nach 4 . . . u. s. w. bis n. Die letzte durch n gezogene Linie schneide den Kegelschnitt in einem Punkte τ. Nun mache ich dasselbe bezüglich des Punktes $t_{,}$, und ich erhalte einen entsprechenden Punkt $\tau_{,}$. Die Linien $t\tau$ und $t_{,}\tau_{,}$ bestimmen nun einen Punkt O.

Ich ziehe eine zweite Transversale T' welche die Curve in t' und $t_{,}'$ treffen soll, und bestimme die analogen Punkte τ' und $\tau_{,}'$. Die Linien $t'\tau'$ und $t_{,}'\tau_{,}'$ geben einen zweiten Punkt O'.

Verbinde ich O mit O', so erhalte ich die Gerade $F_{,}(x,y)$. Diese trifft den Kegelschnitt in zwei Punkten $u_{,}$ und $u_{,}'$, deren jeder eine der gewählten Anordnung entsprechende Lösung des Problems bestimmt.

Die Figur 4 zeigt diese Construction für ein System von drei gegebenen Punkten für den Fall, wenn der Kegelschnitt ein Kreis ist.

Anmerkung.

Man sieht, dass zur Ausführung dieser Construction die Krumme selbst nicht verzeichnet zu sein braucht.

Ist nämlich eine beliebige Transversale gezogen, so finde ich die Punkte, welche sie mit der Curve gemein hat, dadurch, dass ich zuerst den Pol der Transversalen in Bezug auf den Kegelschnitt bestimme, und dann von diesem die zwei Tangenten an die Krumme ziehe. Wo nun diese die Transversale treffen, dort sind die gesuchten Punkte.

Die Aufsuchung des Poles und die Construction der Tangenten lässt sich aber im Allgemeinen ausführen, wenn vom gegebenen Kegelschnitte blos irgendwelche denselben vollkommen bestimmende Elemente, z. B. Lage und Grösse zweier conjugirter Durchmesser, bekannt sind.

Es ist dies auch bezüglich der von Ponçelet angegebenen Methode zu bemerken, nach welcher bekanntlich auch nur Transversalen durch die gegebenen Punkte gezogen werden.

Da es bei der Lösung des Problems auf analytischem Wege da hinauskommt, einen der Punkte u aus den aufgestellten Bedingungsgleichungen zu bestimmen, dieses aber auf verschiedene Weise geschehen kann, so entspricht jeder individuellen Bestimmungsweise eines der Punkte u auch eine eigenthümliche Constructions-Methode.

Wir wollen dies für den einfachen Fall, wenn 3 Punkte gegeben sind, zeigen.

Ich bezeichne die Coordinaten der drei gegebenen Punkte 1, 2, drei mit $x_{,}$, $y_{,}$; $x_{,,}$, $y_{,,}$; $x_{,,,}$, $y_{,,,}$. Die drei Bedingungsgleichungen bestimme ich so:

$$y_{,}\,(u_{,,}+u_{,,,})-u_{,,}u_{,,,}x_{,}-2p-qx_{,}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1$$
$$y_{,,}\,(u_{,}+u_{,,,})-u_{,}u_{,,,}x_{,,}-2p-qx_{,,}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2$$
$$y_{,,,}(u_{,}+u_{,,})-u_{,}u_{,,}x_{,,,}-2p-qx_{,,,}=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3.$$

Diese Anordnung ist eine symmetrische, und als solche die einzig mögliche. Denken wir uns die Werthe von $u_{,,}$ und $u_{,,,}$ aus den

Gleichungen 2 und 3 durch $u_{,}$ ausgedrückt, in 1 eingesetzt und die resultirende Endgleichung für $u_{,}$ in die entsprechende Sehnengleichung umgewandelt, so wird diese die Form haben:

$$y_{,}\varphi(x,y)+x_{,}\psi(x,y)+2p\chi(x,y) = o = G_{,}(x,y).$$

Figur 5 zeigt die der gewählten Anordnung entsprechende Bezeichnung der beiden Dreiecke; die Linie $u_{,}u_{,}'$ ist die von der Gleichung $G_{,}(x,y) = o$ repräsentirte Gerade. Wie bestimmt sich nun diese, wenn der Punkt 1 auf der Krummen selbst liegt? Wie Figur 6 zeigt, einfach dadurch, dass ich die Linien 1, 2 und 1, 3 ziehe, und die Einschnittspunkte, wo diese Linien den Kegelschnitt treffen, verbinde; diese Verbindungslinie wird die Gerade $G_{,}(x,y)$ sein.

Wir haben nun für ein System von drei gegebenen Punkten a, b, c neben der allgemein angegebenen Construction auch noch folgende:

Ich ziehe durch einen der gegebenen Punkte, z. B. durch a, zwei beliebige Transversalen T und T' so, dass jede den gegebenen Kegelschnitt in zwei Punkten trifft. Die Transversale T gebe die Einschnittspunkte t und $t_{,}$, die andere T' treffe die Curve in den Punkten t' und $t_{,}'$. Jetzt ziehe ich die Linie bt, welche den Kegelschnitt in σ, und die Linie ct, welche denselben in γ treffen soll. Ebenso verbinde ich b und c mit $t_{,}$, welche Verbindungslinien die Einschnitte $\sigma_{,}$ und γ geben. Die beiden Linien $\sigma\gamma$ und $\sigma_{,}\gamma_{,}$ bestimmen nun einen Punkt O.

Dasselbe thue ich nun mit den Einschnittspunkten $t_{,}$ und $t_{,}'$ der Transversale T'. Ich erhalte einen zweiten Punkt O'.

Die Gerade OO' treffe nun den Kegelschnitt in den Punkten o und o'.

Jetzt ziehe ich die Geraden bo und co, welche die Curve in den Punkten π und $\varkappa$ schneidet. Ebenso verbinde ich b und c mit o' und erhalte die Einschnitte π' und $\varkappa'$. $o\pi\varkappa$ und $o'\pi'\varkappa'$ sind die beiden der Bedingung entsprechenden Dreiecke.

Figur 7 zeigt diese Construction für den Fall, wenn der gegebene Kegelschnitt ein Kreis ist.